JOURNAL OF NUMBER THEORY **57**, 66–89 (1996)
ARTICLE NO. 0034

Sur l'itération du nombre de diviseurs des entiers sans grand facteur premier

A. Smati*

Département de Mathématiques, U.R.A, C.N.R.S. N° 1586, Université de Limoges, 123, Avenue Albert Thomas, 87060 Limoges cedex, France

Communicated by A. Hildebrand

Received November 16, 1993; revised November 3, 1994

A LA MÉMOIRE DE YVETTE AMICE

1. Introduction

Soit n un entier positif. Désignons par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Dans [6] et [20], P. Erdös et I. Kátai ont montré indépendamment que, pour $x \to +\infty$,

$$\sum_{n \leqslant x} d(d(n)) = A(1 + o(1))\, x \log \log x,$$

où A est une constante positive. G. J. Rieger [21] a améloiré ce résultat et a étudié entre autres, les fonctions

$$\Omega(d(n)) \qquad \text{et} \qquad \omega(d(n))$$

où $\Omega(n)$ et $\omega(n)$ désignent, respectivement, le nombre total de facteurs premiers de n et le nombre de diviseurs premiers de n. G. J. Rieger obtient les formules asymptotiques suivantes

$$\sum_{n \leqslant x} d(d(n)) = Ax \log \log x + a_0 x + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{1.1}$$

$$\sum_{n \leqslant x} \Omega(d(n)) = x \log \log x + b_0 x + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{1.2}$$

$$\sum_{n \leqslant x} \omega(d(n)) = Cx + O(\sqrt{x} \log^5 x) \tag{1.3}$$

* E-mail: smati@cict.fr.

0022-314X/96 $18.00

où A, C sont des constantes positives. E. Heppener [10] a considérablement amélioré les formules (1.1) et (1.2) en montrant que

$$\sum_{n \leqslant x} d(d(n)) = Ax \log \log x + \sum_{\alpha=0}^{N(x)} a_\alpha x(\log x)^{-\alpha} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

et

$$\sum_{n \leqslant x} \Omega(d(n)) = x \log \log x + \sum_{\alpha=0}^{N(x)} b_\alpha x(\log x)^{-\alpha} + O(xe^{-\sqrt{\log x}})$$

où $N(x)$ désigne la partie entière de $\sqrt{\log x}$ et c une constante positive. Remarquons que les méthodes de G. J. Rieger et de E. Heppner permettent d'obtenir des formules analogues pour les fonctions

$$B(d(n)), B^*(d(n)), p(d(n)), \frac{1}{p(d(n))}$$

où l'on a noté

$$B(n) = \sum_{p^\alpha \parallel n} \alpha p, \qquad B^*(n) = \sum_{p \mid n} p, \qquad p(n) = \max_{p \mid n} \{p\} \qquad \text{et} \qquad p(1) = 1.$$

On a ainsi les estimations, pour $x \to +\infty$,

$$\sum_{n \leqslant x} B(d(n)) \sim 2x \log \log x$$

$$\sum_{n \leqslant x} B^*(d(n)) \sim C_1 x$$

$$\sum_{n \leqslant x} p(d(n)) \sim C_2 x$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(d(n))} \sim C_3 x$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes positives. On remarquera en particulier que

$$\sum_{n \leqslant x} B(d(n)) \sim 2 \sum_{n \leqslant x} \Omega(d(n)).$$

Soient x et y des nombres réels tels que $x \geqslant y \geqslant 2$ et $p(n)$ (comme précédemment défini) le plus grand diviseur premier de n. L'objet de cet article est essentiellement l'étude de la quantité

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y}} d(d(n)).$$

Cela conduit, naturellement, à la comparer à la fonction

$$\Psi(x, y) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y}} 1.$$

Cette fonction, dont l'étude a commencé au moins au début des années 1930, est aujourd'hui assez bien connue. Elle a été l'objet de nombreux et importants travaux au cours des trente dernières années et singulièrement pendant la décenie passée [2], [3], [4], [5], [12], [13], [14]. Le lecteur, intéressé par le sujet, pourra trouver dans [15] ainsi que dans le récent ouvrage [23] un exposé synthétique et une abondante bibliographie.

Dans toute la suite, on notera selon l'usage

$$u = \frac{\log x}{\log y},$$

$\xi = \xi(u)$, l'unique solution positive de l'équation

$$e^{\xi} = 1 + u\xi$$

pour $u > 1$ et $\xi(1) = 0$, enfin

$$\beta = \beta(x, y) = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y}.$$

Désignons par p un nombre premier générique et par q un entier "squarefull" générique (q "squareful" signifie que p^2 divise q chaque fois que le nombre premier p divise q). Notons également

$$li(v) = \int_2^{\max(2, v)} \frac{dt}{\log t}, \qquad \text{pour} \quad v \geqslant 1.$$

Posons, pour tout nombre réel σ, $\sigma > \frac{1}{2}$

$$A(\sigma) = \frac{1}{\zeta(2\sigma)} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{A(\sigma, q)\, d(q^*)}{q^{\sigma}}$$

et

$$D(\sigma) = \frac{1}{\zeta(2\sigma)} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{c(q)\, d(q^*)}{q^{\sigma}}$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann,

$$A(\sigma, q) = \prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1}, \qquad c(q) = \prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$$

et

$$q^* = \begin{cases} d(q) & \text{si} \quad d(q) \text{ est impair} \\ 2^{-\alpha} d(q) & \text{si} \quad 2^\alpha \parallel d(q). \end{cases}$$

Enfin, pour ε fixé, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, désignons par (R_ε) la condition

$$(\log x)^{2+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x, \qquad x \geqslant x_0(\varepsilon).$$

Notre premier théorème est le suivant

THÉORÈME 1.1. *Sous la condition (R_ε), on a uniformément*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y}} d(d(n)) = (li(u\xi(u)) + \log\log y)\, \Psi(x, y)$$

$$\times \left\{ A(\beta) + O_\varepsilon\left((A(\beta - \varepsilon/12) + D(\beta - \varepsilon/12)) \frac{\log\log(u+2)}{u + \log\log y} \right) \right.$$

$$\left. + O_\varepsilon\left((A(\beta - \varepsilon/12) + D(\beta - \varepsilon/12)) \frac{\log\log y}{\log y} \right) \right\}.$$

On a le corollaire suivant

COROLLAIRE. *Sous la condition (R_ε), on a*

(a) *la formule asymptotique*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y}} d(d(n)) \sim A(u + \log\log y)\, \Psi(x, y)$$

est valable, si et seulement si,

$$\frac{\log y}{\log\log x} \to +\infty \qquad \textit{quand} \quad x \to +\infty;$$

(b) *si $u = o(\log\log y)$, alors*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y}} d(d(n)) \sim A \log\log y \Psi(x, y);$$

(c) *si* $\log\log y = o(u)$ *et si* $\log y/\log\log x \to +\infty$ *quand* $x \to +\infty$, *alors*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y}} d(d(n)) \sim Au\Psi(x, y).$$

Ce corollaire s'obtient comme suit. D'abord, on remarque que (b) et (c) découlent immédiatement de (a). Montrons (a). On a, d'une part,

$$li(u\xi(u)) \sim \frac{u\xi(u)}{\log(u\xi(u))} \sim u$$

puisque $\log(u\xi(u)) = \log(e^{\xi(u)} - 1) \sim \log e^{\xi(u)} = \xi(u)$. D'autre part, d'après le lemme 3.1 (b), on a sous la condition (R_ε), $\beta \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon/6$. La série définissant $A(\beta)$ est donc uniformément convergente dans le domain définie par (R_ε) et par suite sa somme $A(\beta)$ y est une fonction continue en β. Finalement

$$A(\beta) \sim A(1) = A$$

(A étant la constante apparaissant dans (1.1)) si et seulement si

$$\frac{\xi(u)}{\log y} \to 0 \qquad \text{quand} \quad x \to +\infty$$

et cette condition équivaut à

$$\frac{\log y}{\log\log x} \to +\infty \qquad \text{quand} \quad x \to +\infty.$$

Cela achève la preuve de (a).

Le théorème 1.1 et le corollaire restent valables lorsqu'on remplace $d(d(n))$ par $B(d(n))$ (respectivement par $\Omega(d(n))$) à condition de remplacer dans le théorème 1.1, $A(\beta)$ par $2\bar{A}(\beta)$ (respectivement par $\bar{A}(\beta)$) où

$$\bar{A}(\beta) = \frac{1}{\zeta(2\beta)} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{A(\beta, q)}{q^\beta} = 1,$$

et dans le corollaire $A(1) = A$ par $2\bar{A}(1) = 2$ (respectivement par $\bar{A}(1) = 1$). Signalons que le comportement asymptotique de $d(d(n))$ est proche de celui de $\omega(n)$ et que la méthode du présent article permet d'obtenir un résultat analogue au théorème 1.1 dans le cas de $\omega(n)$. Voir également à ce sujet [1], [28].

De nombreux auteurs ont étudié le comportement asymptotique de sommes de fonctions arithmétiques restreintes aux entiers sans grand facteur premier [9], [11], [16], [17], [19], [22], [24], [27]. Le travail d'Ivić et Tenenbaum [19] nous intéresse ici, particulièrement, car la preuve de notre théorème 1.1 et fondée sur leur méthode et utilise, notamment, leurs résultats sur le comportement asymptotique local de la fonction $\Psi(x, y)$. Ces résultats sont rappelés au paragraphe 2. Le résultat principal des deux auteurs concernent le comportement local de fonctions arithmétiques qualifiées de "fonctions arithmétiques à noyau squarefull" c'est-à-dire des fonctions arithmétiques f à valeurs entières positives telles que pour tout entier $n \geqslant 1$ on ait $f(n) = f(q)$, où q est la partie squarefull de n. Un exemple de telles fonctions, est la fonction caractéristique des entiers sans facteur carré, $\mu^2(n)$. Ce résultat s'énonce comme suit: sous la condition (R_ε), on a uniformément pour $k \geqslant 0$

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y \\ f(n) = k}} 1 = \Psi(x, y) \left\{ d_k(\beta; f) + O_\varepsilon \left(\left(D_k \left(\beta - \frac{\varepsilon}{10}; f \right) + D_k(\beta, f) \right) \frac{\log \log y}{\log y} \right) \right\} \tag{1.4}$$

où

$$d_k(\beta; f) = \frac{1}{\zeta(2\beta)} \sum_{\substack{q=1 \\ f(q)=k}}^{+\infty} \frac{A(\beta, q)}{q^\beta} \qquad \text{et} \qquad D_k(\beta, f) = \frac{1}{\zeta(2\beta)} \sum_{\substack{q=1 \\ f(q)=k}}^{+\infty} \frac{c(q)}{q^\beta}.$$

Contrairement aux fonctions $d(d(n))$, $B(d(n))$ et $\Omega(d(n))$, les fonctions $\omega(d(n))$, $B^*(d(n))$ et $p(d(n))$ sont pratiquement à noyau squarefull selon la terminologie d'Ivić et Tenenbaum. La méthode de ces deux auteurs permet d'obtenir, sans grand changement, les analogues de la formule (1.4) pour ces fonctions.

A l'instar de nombreux auteurs [7], [8], [17], [25], [26], [27] il nous semble intéressant d'étudier la somme

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{d(d(n))}{p(n)}$$

et de la comparer à la somme

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(n)}.$$

Le comportement asymptotique de cette dernière somme est éclucidé. On a, notamment, dans [8], la formule

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(n)} = x\delta(x) \left\{ 1 + O\left(\sqrt{\frac{\log \log x}{\log x}} \right) \right\} \tag{1.5}$$

où $\delta(x)$ est une fonction dont une approximation, lorsque x tend vers l'infini, [18], est

$$\delta(x)=\exp\left\{-\sqrt{2\log x\log\log x}\left(1+\frac{\log\log\log x-2-\log 2}{2\log\log x}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{1}{8}+o(1)\right)\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)^2\right)\right\}. \tag{1.6}$$

Notre deuxième théorème est le suivant

Théorème 1.2. *On a*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{d(d(n))}{p(n)}=\left\{\sqrt{\frac{2\log x}{\log\log x}}\left(A+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right)\right\}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p(n)}.$$

Ce théorème reste valable lorsqu'on remplace la fonction $d(d(n))$ par $B(d(n))$ (respectivement $\Omega(d(n))$ à condition de remplacer la constante A par 2 *(respectivement* 1). *On suit, pour la preuve du théorème* 1.2, *la méthode d'Ivić* [17]. *Celui-ci a étudié, notamment, les sommes*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\omega(n)}{p(n)}\qquad et\qquad \sum_{n\leqslant x}\frac{\Omega(n)-\omega(n)}{p(n)}$$

et a obtenu les formule suivantes

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\omega(n)}{p(n)}=\left\{\sqrt{\frac{2\log x}{\log\log x}}\left(1+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right)\right\}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p(n)} \tag{1.7}$$

et

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Omega(n)-\omega(n)}{p(n)}=\left\{\sum_p\frac{1}{p^2-p}+O\left(\sqrt{\frac{\log\log x}{\log x}}\right)\right\}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p(n)}. \tag{1.8}$$

Il note à la fin de ce même article qu'il est possible d'obtenir par sa méthode l'analogue de la formule (1.8) pour la somme

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{p(n)}$$

où f est une fonction arithmétique à noyau squarefull. De sa remarque découlent, notamment, des formules analogues à (1.8) pour les fonctions $\omega(d(n))$, $B^*(d(n))$ et $p(d(n))$. Enfin, notons encore l'analogie des comportements asymptotiques de $d(d(n))$ et de $\omega(n)$ en comparant le théorème 1.2 et la formule (1.7). Le reste de notre article est structuré comme suit: au paragraphe 2, on rappelle quelques résultats connus sur le comportement local de $\Psi(x, y)$ ainsi qu'un résultat concernant la somme de l'inverse de $p(n)$. Le paragraphe 3 est consacré a des lemmes auxiliaires, le paragaphe 4 à la démonstration du théorème 1.1 et enfin le paragraphe 5 à la démonstration du théorème 1.2.

2. Comportement local de $\Psi(x, y)$, somme de l'inverse du plus grand diviseur premier de n

On rappelle, ici, les lemmes connus suivants qui nous seront utiles dans la suite. Les trois premiers sont dus à Ivić et Tenenbaum [19] et la quatrième est dû à Ivić [17]. Notons

$$\Psi_s^*(x, y) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y,\, (n, s) = 1}} \mu^2(n)$$

et $(\tilde{R}_\varepsilon)$, pour ε fixé, $0 < \varepsilon < 1$, la condition

$$x \geqslant 2, (\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x.$$

Lemme 2.1 ([19], Lemma 2). *Sous la condition $(\tilde{R}_\varepsilon)$, on a uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant y$*

$$\Psi\left(\frac{x}{d}, y\right) = \Psi(x, y)\, d^{-\beta}\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log d}{\log x} + \frac{\log\log y}{\log y}\right)\right).$$

Lemme 2.2 ([19], lemma 3). *Sous la condition $(\tilde{R}_\varepsilon)$, on a uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant x$*

$$\Psi\left(\frac{x}{d}, y\right) \ll \Psi(x, y)\, d^{-\beta + c/\log y}$$

où c est une constante absolue.

Lemme 2.3 ([19], lemma 4). *Sous la condition $(\tilde{R}_\varepsilon)$, on a uniformément pour $r \geqslant 1$*

$$\Psi_r^*(x, y) = \zeta^{-1}(2\beta)\, \Psi(x, y)\left\{A(\beta, r) + O_\varepsilon\left(c(r)\,\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right\}.$$

Lemme 2.4 ([17], formule (4.3)). *On a, pour tout $\Delta > 0$ fixé,*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(n)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{\log^{\Delta} x}\right)\right) \sum_{L_1 \leqslant p \leqslant L_2} \frac{1}{p} \Psi\left(\frac{x}{p}, p\right)$$

où

$$L_1 = \exp\left\{\sqrt{\frac{1}{2} \log x \log\log x}\left(1 - 2\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right\}$$

et

$$L_2 = \exp\left\{\sqrt{\frac{1}{2} \log x \log\log x}\left(1 + 2\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right\}.$$

3. Lemmes auxiliaires

Lemme 3.1. (a) *On a, pour $u \geqslant 3$,*

$$\xi(u) = \log u + \log\log u + O(1).$$

(b) *Sous la condition (R_ε), on a*

$$\beta(x, y) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{6}.$$

(c) *Posons $\tilde{\beta} = \beta(x/d, y)$. Sous la condition (R_ε), on a*

(i) *uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{x}$*

$$\zeta^{-1}(2\tilde{\beta}) = \zeta^{-1}(2\beta)\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log d}{\log x \log y}\right)\right);$$

(ii) *uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{x}$ et $r \geqslant 1$*

$$A(\tilde{\beta}, r) = A(\beta, r)\left(1 + O\left(\frac{\log d \log r}{\log x \log y}\right)\right);$$

(iii) *uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{x}$, $k \geqslant 1$, $p \geqslant 2$ premier $p \nmid k$*

$$A(\tilde{\beta}, pk) = A(\beta, pk)\left(1 + O\left(\frac{\log d}{\log x \log y} \cdot \frac{\log p}{\sqrt{p} - 1}\right) + O\left(\frac{\log d \log k}{\log x \log y}\right)\right).$$

Démonstration. (a) L'existence et l'unicité de $\xi(u)$ pour $u>1$ découle, par exemple, de l'étude de la fonction $t \mapsto (e^t-1)/t$. La formule asymptotique s'obtient par itération de l'équation

$$\frac{e^{\xi}-1}{\xi}=u.$$

Voir, pour les détails, [23] lemme 8.1, page 412. Ce procédé d'itération permet d'obtenir un développement asymptotique de $\xi(u)$ arbitrairement long.

(b) S'obtient en utilisant (a) et la définition de β: $\beta(x, y)=1-\xi(u)/\log y$.

(c) Montrons d'abord que, uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{x}$,

$$\tilde{\beta}=\beta+O\left(\frac{\log d}{\log x \log y}\right). \tag{3.1}$$

En dérivant l'équation vérifiée par ξ et en utilisant le fait que $\xi(u) \sim \log u$, on obtient que $\xi'(u) \sim 1/u$. Posons $t=\log d/\log y$. On a, pour une constante c convenable et u assez grand,

$$\xi(u)-\xi(u-t)=\int_{u-t}^{u} \xi'(v)\, dv \leqslant c \int_{u-t}^{u} \frac{dv}{v}=c \log\left(\frac{u}{u-t}\right) \leqslant 2c\, \frac{t}{u},$$

d'où

$$\xi(u-t)=\xi(u)+O\left(\frac{t}{u}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\tilde{\beta}=1-\frac{\xi(u-t)}{\log y}=1-\frac{\xi(u)}{\log y}+O\left(\frac{t}{u \log y}\right)=\beta+O\left(\frac{\log d}{\log x \log y}\right).$$

Montrons, maintenant (i). En utilisant (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}\zeta^{-1}(2\tilde{\beta}) &= \zeta^{-1}(2\beta) \exp\left\{\sum_p \int_{2\beta}^{2\tilde{\beta}} \frac{d}{d\sigma} \log\left(1-\frac{1}{p^{\sigma}}\right)\right\} \\ &= \zeta^{-1}(2\beta) \exp\left\{O\left(\frac{\log d}{\log x \log y}\right) \sum_p \frac{\log p}{p^{2\beta}-1}\right\}.\end{aligned}$$

Comme sous la condition de l'énoncé

$$\beta \geqslant \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{6}$$

il s'ensuit que

$$\sum_{p} \frac{\log p}{p^{2\beta}-1} \ll_{\varepsilon} 1$$

et par suite

$$\zeta^{-1}(2\tilde{\beta}) = \zeta^{-1}(2\beta)\left(1 + O_{\varepsilon}\left(\frac{\log d}{\log x \log y}\right)\right).$$

Montrons (ii). Comme dans (i), on a

$$A(\tilde{\beta}, r) = A(\beta, r) \exp\left\{O\left(\frac{\log d}{\log x \log y} \sum_{p \mid r} \frac{\log p}{p^{\beta}-1}\right)\right\}.$$

Mais, puisque $\beta > 1/2$, on obtient

$$\sum_{p \mid r} \frac{\log p}{p^{\beta}-1} < \sum_{p \mid r} \frac{\log p}{\sqrt{p}-1} \ll \log r.$$

Le résultat (ii) s'ensuit. Enfin (iii) se déduit de la même façon que (ii), nous omettons les détails.

Notons, pour $\varepsilon > 0$,

$$L_{\varepsilon}(y) = \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}.$$

Lemme 3.2. *Soit* ε *un nombre réel fixé,* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. *Sous la condition*

$$1 \leqslant u \leqslant y^{1-\varepsilon}, \qquad y \geqslant 3 \qquad (V_{\varepsilon})$$

on a uniformément

(a) $$\sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p^{\beta}} = li(u\xi(u)) + \log\log y + O(\log\log(u+2)) + O_{\varepsilon}\left(\frac{u}{L_{\varepsilon}(y)}\right);$$

(b) $$\sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^{\beta}} = u \log y + O\left(\frac{\log y}{\log(u+1)}\right) + O_{\varepsilon}\left(\frac{u}{L_{\varepsilon}(y)}\right).$$

Démonstration. Notons

$$\eta(x, y) = \sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p^{\beta}}, \qquad \eta^{*}(x, y) = \sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^{\beta}},$$

$$\pi(y) = \sum_{p \leqslant y} 1, \qquad R(y) = \pi(y) - li(y).$$

(a) On suppose dans la suite que y et u sont suffisamment grands, car dans le cas contraire, l'estimation (a) est triviale. L'intégrale de Stieltjes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\eta(x, y) &= \int_{2^-}^{y} \frac{d(\pi(t))}{t^\beta} = \int_{2^-}^{y} \frac{d[\,li(t)+R(t)\,]}{t^\beta} \\ &= \int_{2}^{y} \frac{dt}{t^\beta \log t} + \int_{2^-}^{y} \frac{d(R(t))}{t^\beta} \\ &=: \eta_1 + \eta_2.\end{aligned}$$

Considérons d'abord η_1. Posant le changement de variable

$$v = \frac{\log t}{\log y},$$

on obtient

$$\eta_1 = \int_{\log 2/\log y}^{1} \frac{e^{\xi(u)\,v}}{v}\,dv.$$

Maintenant, posons $\varepsilon' = \log 2/\xi(u)$ et scindons η_1:

$$\eta_1 = \int_{\log 2/\log y}^{\varepsilon'} + \int_{\varepsilon'}^{1} =: \bar{\eta}_1 + \bar{\bar{\eta}}_1.$$

En posant $s = e^{v\xi(u)}$, $\bar{\bar{\eta}}_1$ devient

$$\bar{\bar{\eta}} = \int_{2}^{e^{\xi(u)}} \frac{ds}{\log s} = li(e^{\xi(u)}).$$

Mais, comme $e^{\xi(u)} = 1 + u\xi(u)$, il s'ensuit clairement que

$$\bar{\bar{\eta}}_1 = li(1 + u\xi(u)) = li(u\xi(u)) + O\left(\frac{1}{\log(u\xi(u))}\right).$$

Quant à $\bar{\eta}_1$, on l'écrit:

$$\bar{\eta}_1 = \int_{\log 2/\log y}^{\varepsilon'} \frac{dv}{v} + \int_{\log 2/\log y}^{\varepsilon'} \frac{e^{\xi(u)\,v} - 1}{v}\,dv =: \hat{\eta}_1 + \hat{\hat{\eta}}_1.$$

On a, clairement,

$$\hat{\eta}_1 = \log\log y - \log \xi(u)$$

et

$$\hat{\hat{\eta}}_1 \leqslant \int_0^{\varepsilon'} \frac{e^{\xi(u)\,v}-1}{v}\,dv = \int_0^{\log 2} \frac{e^t-1}{t}\,dt \ll 1.$$

L'estimation de $\xi(u)$ du lemme 3.1 (a) donne

$$\log \xi(u) = O(\log\log u) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\log(u\xi(u))} = O\left(\frac{1}{\log u}\right).$$

Finalement, on a obtenu

$$\eta_1 = li(u\xi(u)) + \log\log y + O(\log\log u).$$

Quant à η_2, l'application du théorème des nombres premiers sous la forme $R(y) \ll_\varepsilon y/L_{\varepsilon/2}(y)$, $0<\varepsilon<1/2$ et un calcul routinier permettent d'obtenir $\eta_2 = O_\varepsilon(u/L_\varepsilon(y))$ uniformément pour $u \leqslant y^{1-\varepsilon}$. Nous omettons les détails. (a) du lemme découle des estimations de η_1 et η_2.

L'estimation (b) s'obtient de la même manière que (a). Ecrivant

$$\eta^*(x, y) = \int_2^y \frac{dt}{t^\beta} + \int_{2^-}^y \frac{\log t}{t^\beta}\,d(R(t)),$$

on obtient, uniformément pour $u \leqslant y^{1-\varepsilon}$, u et y suffisamment grands,

$$\int_2^y \frac{dt}{t^\beta} = u\log y + O\left(\frac{\log y}{\log u}\right)$$

et

$$\int_2^y \frac{\log t}{t^\beta}\,d(R(t)) = O_\varepsilon\left(\frac{u}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

Les détails de la démonstration sont les mêmes que ceux de la démonstration de (a). Nous les omettons.

LEMME 3.3. *Sous la condition* (R_ε), *on a, uniformément pour* $1 \leqslant d \leqslant y$, $r \geqslant 1$ *et* $p \geqslant 2$, *premier*, $p \nmid r$,

$$\Psi^*_{pr}\left(\frac{x}{d}, y\right) = \zeta^{-1}(2\beta)\,\Psi(x, y)\,d^{-\beta}\left\{A(\beta, pr) + O\left(A(\beta, r)\frac{\log d}{\log y}\right)\right.$$
$$\left. + O\left(A(\beta, r)\frac{\log r}{\log y}\right) + O\left(\frac{A(\beta, r)}{\log y}\frac{\log p}{\sqrt{p}-1}\right) + O_\varepsilon\left(c(r)\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right\}.$$

Démonstration. Le lemme est une conséquence directe des lemmes 2.1, 2.3 et 3.1(c). Nous omettons les détails.

Notons

$$S_r(x, y) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y,\ (n, r) = 1}} \mu^2(n)\, \omega(n).$$

LEMME 3.4. *Sous la condition* (R_ε), *on a uniformément pour* $q \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} S_q(x, y) = {} & (li(u\xi(u)) + \log\log y)\, \Psi(x, y) \\ & \times \left\{ \frac{A(\beta, q)}{\zeta(2\beta)} + O_\varepsilon\left(\frac{A(\beta, q)}{\zeta(2\beta)} \log q \frac{\log\log(u+2)}{u + \log\log y} \right) \right. \\ & \left. + O_\varepsilon\left(\frac{A(\beta, q) + c(q)}{\zeta(2\beta)} \log q \frac{\log\log y}{\log y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1$, on écrit,

$$\begin{aligned} S_q(x, y) &= \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y,\ (n, q) = 1}} \mu^2(n) \left(\sum_{p \mid n} 1 \right) \\ &= \sum_{p \leqslant y} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y,\ (n, q) = 1 \\ p \mid n}} \mu^2(n) \\ &= \sum_{p \leqslant y} \sum_{\substack{m \leqslant x/p \\ p(m) \leqslant y,\ (pm, q) = 1 \\ p \nmid m}} \mu^2(m) \\ &= \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p \nmid q}} \sum_{\substack{m \leqslant x/p \\ p(m) \leqslant y,\ (m, pq) = 1}} \mu^2(m). \end{aligned}$$

Ainsi

$$S_q(x, y) = \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p \nmid q}} \Psi^*_{pq}\left(\frac{x}{p}, y \right).$$

Comme $\log(x/p) \leqslant \log x$ et que le lemme est trivialement vérifié pour $y \geqslant x/p$, on obtient, par application du lemme 3.3 que, uniformément pour (R_ε),

$$S_q(x,y)=\zeta^{-1}(2\beta)\,\Psi(x,y)\left\{A(\beta,q)\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\beta}-A(\beta,q)\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p\mid q}}\frac{1}{p^\beta}\right.$$

$$-A(\beta,q)\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid q}}\frac{1}{p^\beta(p^\beta+1)}+O\left(\frac{A(\beta,q)}{\log x}\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\beta}\right)$$

$$+O\left(\frac{A(\beta,q)\log q}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\beta}\right)+O\left(\frac{A(\beta,q)}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\beta(\sqrt{p}-1)}\right)$$

$$\left.+O_\varepsilon\left(c(q)\frac{\log\log y}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\beta}\right)\right\}.$$

Maintenant, d'après le lemme 3.1(b), $\beta\geqslant\frac{1}{2}+(\varepsilon/6)$. Il s'ensuit que

$$A(\beta,q)\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p\mid q}}\frac{1}{p^\beta}=O\left(A(\beta,q)\sum_{\substack{p\leqslant q\\ p\mid q}}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)=O(A(\beta,q)\log q),$$

$$A(\beta,q)\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid q}}\frac{1}{p^\beta(p^\beta+1)}=O\left(A(\beta,q)\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1+\varepsilon/3}}\right)=O_\varepsilon(A(\beta,q)),$$

$$A(\beta,q)\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\beta(\sqrt{p}-1)}=O\left(A(\beta,q)\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1+\varepsilon/6}}\right)=O_\varepsilon(A(\beta,q)).$$

Ces estimations associées au lemme 3.2, dont l'application est légitime puisque la condition (R_ε) implique la condition (V_ε), donnent

$$S_q(x,y)=(li(u\xi(u))+\log\log y)\,\Psi(x,y)\left\{\frac{A(\beta,q)}{\zeta(2\beta)}+O\left(\frac{A(\beta,q)}{\zeta(2\beta)}\frac{\log q}{\log y}\right)\right.$$

$$+O_\varepsilon\left(\frac{c(q)}{\zeta(2\beta)}\frac{\log\log y}{\log y}\right)+O_\varepsilon\left(\frac{A(\beta,q)}{\zeta(2\beta)}\log q\,\frac{1}{u+\log\log y}\right)$$

$$\left.+O\left(\frac{A(\beta,q)}{\zeta(2\beta)}\frac{\log\log u}{u+\log\log y}\right)+O\left(\frac{u}{L_\varepsilon(y)(u+\log\log y)}\right)\right\}$$

puisque $li(u\xi(u))=u+O(u/\log u)$. Le lemme s'ensuit immédiatement.

4. Démonstration du théorème 1.1

Tout entier $n\geqslant 1$, s'écrit

$$n=mq$$

où m est squarefree, q squarefull et $(m,q)=1$. Donc

$$d(n)=d(mq)=d(m)\,d(q)=2^{\omega(m)}d(q).$$

Posons

$$q^* = \begin{cases} d(q) & \text{si} \quad d(q) \text{ est impair} \\ 2^{-\alpha}\, d(q) & \text{si} \quad 2^\alpha \parallel d(q). \end{cases}$$

Alors $d(n) = 2^{\omega(m)+\alpha} q^*$, et par suite

$$d(d(n)) = (\omega(m) + \alpha + 1)\, d(q^*) = d(q^*)\, \omega(m) + d(d(q)).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y}} d(d(n)) &= \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} \sum_{\substack{m \leqslant x/q \\ p(m) \leqslant y,\, (m,\, q) = 1}} (d(q^*)\, \omega(m) + d(d(q))) \\ &= \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} d(q^*)\, S_q\left(\frac{x}{q}, y\right) + \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} d(d(q))\, \Psi_q^*\left(\frac{x}{q}, y\right) \\ &=: \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

Evaluons Σ_1. Posons $Y = (\log y)^{24/\varepsilon}$ et scindons Σ_1:

$$\Sigma_1 = \Sigma_{1,\,1} + \Sigma_{1,\,2}$$

où

$$\Sigma_{1,\,1} =: \sum_{q \leqslant Y} d(q^*)\, S_q\left(\frac{x}{q}, y\right)$$

et

$$\Sigma_{1,\,2} =: \sum_{\substack{Y < q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} d(q^*)\, S_q\left(\frac{x}{q}, y\right).$$

Considérons $\Sigma_{1,\,1}$. Posons $\tilde{\beta} = \beta(x/q, y)$ et $\tilde{u} = u - (\log q/\log y)$. L'application des lemmes 3.4 et 2.1 donne

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,\,1} = \sum_{q \leqslant Y} \frac{d(q^*)}{q^\beta} (li(\tilde{u}\xi(\tilde{u})) + \log\log y)\, \Psi(x, y) \left\{ \frac{A(\tilde{\beta}, q)}{\zeta(2\tilde{\beta})} \right. \\ \left. + O_\varepsilon\left(\frac{A(\tilde{\beta}, q)}{\zeta(2\tilde{\beta})} \log q \frac{\log\log \tilde{u}}{\tilde{u} + \log\log y}\right) + O_\varepsilon\left(\frac{A(\tilde{\beta}, q) + c(q)}{\zeta(2\tilde{\beta})} \log q \frac{\log\log y}{\log y}\right) \right\} \end{aligned}$$

et l'application du lemme 3.1 (c) donne

$$\Sigma_{1,1}=li(u\xi(u))+\log\log y)\,\Psi(x,y)\sum_{q\leqslant Y}\frac{d(q^*)}{q^\beta}\left\{\frac{A(\beta,q)}{\zeta(2\beta)}\right.$$

$$\left.+O_\varepsilon\left(\frac{A(\beta,q)}{\zeta(2\beta)}\log q\,\frac{\log\log u}{u+\log\log y}\right)+O_\varepsilon\left(\frac{A(\beta,q)+c(q)}{\zeta(2\beta)}\log q\,\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right\}.$$

Maintenant,

$$\sum_{q\leqslant Y}\frac{d(q^*)\,A(\beta,q)}{q^\beta}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{d(q^*)\,A(\beta,q)}{q^\beta}-\sum_{q>Y}\frac{d(q^*)\,A(\beta,q)}{q^\beta}$$

et

$$\zeta^{-1}(2\beta)\sum_{q>Y}\frac{d(q^*)\,A(\beta,q)}{q^\beta}=O_\varepsilon\left(\frac{\zeta^{-1}(2\beta-\varepsilon/6)}{\log y}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{d(q^*)\,A(\beta-\varepsilon/12,q)}{q^{\beta-\varepsilon/12}}\right)$$

$$=O_\varepsilon\left(\frac{A(\beta-\varepsilon/12)}{\log y}\right).$$

On obtient alors

$$\Sigma_{1,1}=(li(u\xi(u))+\log\log y)\,\Psi(x,y)\left\{A(\beta)+O_\varepsilon\left(A(\beta-\varepsilon/12)\,\frac{\log\log u}{u+\log\log y}\right)\right.$$

$$\left.+O_\varepsilon\left((A(\beta-\varepsilon/12)+D(\beta-\varepsilon/12))\,\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right\}.$$

Considérons, maintenant, $\Sigma_{1,2}$. On a

$$\Sigma_{1,2}=\sum_{\substack{Y<q\leqslant x\\ p(q)\leqslant y}}d(q^*)\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid q}}\Psi^*_{pq}\left(\frac{x}{pq},y\right)\leqslant\sum_{Y<q\leqslant x}d(q^*)\sum_{p\leqslant y}\Psi^*_1\left(\frac{x}{pq},y\right).$$

Mais, d'après le lemme 2.3,

$$\Psi^*_1\left(\frac{x}{pq},y\right)\ll_\varepsilon\zeta^{-1}(2\tilde\beta)\,\Psi\left(\frac{x}{pq},y\right)\ll_\varepsilon\zeta^{-1}(2\beta)\,\Psi\left(\frac{x}{pq},y\right)$$

où $\tilde\beta=\beta(x/pq,y)$. Comme le lemme 2.2 donne

$$\Psi\left(\frac{x}{pq},y\right)\ll\Psi(x,y)(pq)^{-\beta+c/\log y}$$

on obtient

$$\Sigma_{1,2} \ll \Psi(x, y) \left(\sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p^{\beta - c/\log y}} \right) \zeta^{-1}(2\beta) \sum_{Y < q \leqslant x} \frac{d(q^*)}{q^{\beta - c/\log y}}.$$

Maintenant, on a, d'une part pour $p \leqslant y$, $1/p^{\beta - c/\log y} \ll 1/p^{\beta}$ et donc le lemme 3.2 donne

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p^{\beta - c/\log y}} \ll li(u\xi(u)) + \log \log y,$$

et d'autre part,

$$A(\beta, q)^{-1} \ll \exp(\sqrt{\log p}) \ll q^{\varepsilon/48}$$

pour $q > Y$ et Y suffisamment grand. Il s'ensuit que

$$q^{-\beta + c/\log y} \leqslant q^{-\beta + \varepsilon/12} A(\beta, q)\ Y^{-\varepsilon/24}$$

pour $q > Y$ et Y suffisamment grand. D'où, finalement, on obtient

$$\Sigma_{1,2} \ll_{\varepsilon} (li(u\xi(u)) + \log \log y)\ \Psi(x, y)\, \frac{A(\beta - \varepsilon/12)}{\log y}.$$

Evaluons, maintenant, Σ_2.

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} d(d(q))\ \Psi_q^* \left(\frac{x}{q}, y \right).$$

On a, par application du lemme 2.3,

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} d(d(q))\ \Psi_1^* \left(\frac{x}{q}, y \right) \ll_{\varepsilon} \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} d(d(q))\, \zeta^{-1}(2\tilde{\beta})\ \Psi \left(\frac{x}{q}, y \right)$$

où $\tilde{\beta} = \beta(x/q, y)$. L'application du lemme 2.2 donne

$$\Sigma_2 \ll_{\varepsilon} \Psi(x, y)\, \zeta^{-1}(2\beta) \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} \frac{d(d(q))}{q^{\beta - c/\log y}}.$$

Mais, pour q et y suffisamment grand

$$d(d(q)) \ll q^{\varepsilon/24} \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{\log y} \leqslant \varepsilon/24$$

et comme

$$1 \leqslant d(q^*)\, c(q),$$

il s'ensuit que

$$\zeta^{-1}(2\beta) \sum_{\substack{q \leqslant x \\ p(q) \leqslant y}} \frac{d(d(q))}{q^{\beta - c/\log y}} \ll_\varepsilon \zeta^{-1}(2\beta) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{d(q^*)\, c(q)}{q^{\beta - \varepsilon/12}} \ll_\varepsilon D(\beta - \varepsilon/12)$$

et finalement

$$\Sigma_2 \ll_\varepsilon D(\beta - \varepsilon/12)\, \Psi(x, y).$$

Cela termine la démonstration du théorème 1.1.

5. Démonstration du théorème 1.2

Nous suivons, ici, la méthode d'Ivić [17]. On a besoin du lemme suivant

Lemme 5.1. *Pour*

$$y_0 = \exp\left\{\sqrt{\frac{1}{2} \log x \log \log x}\left(1 + O\left(\frac{\log \log \log x}{\log \log x}\right)\right)\right\},$$

on a

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y_0}} d(2d(n)) = \Psi(x, y_0) \sqrt{\frac{2 \log x}{\log \log x}}\left(A + O\left(\frac{\log \log \log x}{\log \log x}\right)\right).$$

Démontrons d'abord ce lemme. Il est clair d'après la démonstration du théorème 1.1, que celui-ci reste valable si l'on y remplace $d(d(n))$ par $d(2d(n))$.

Posons

$$u_0 = \frac{\log x}{\log y_0}, \qquad \beta_0 = \beta(x, y_0).$$

Pour x suffisamment grand, on choisit $\varepsilon = 1/4$ et compte tenu de la remarque précédente, on applique la formule du théorème 1.1. Cela donne

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \leqslant y_0}} d(2d(n))$$
$$= \Psi(x, y_0)(li(u_0 \xi(u_0)) + \log\log y_0)$$
$$\times \left\{ A(\beta_0) + O\left((A(\beta_0 - 1/48) + D(\beta_0 - 1/48)) \frac{\log\log u_0}{u_0 + \log\log y_0} \right) \right.$$
$$\left. + O\left((A(\beta_0 - 1/48) + D(\beta_0 - 1/48)) \frac{\log\log y_0}{\log y_0} \right) \right\}. \tag{5.1}$$

Maintenant, la méthode décrite dans la preuve du lemme 3.1 (c) permet de montrer que

$$A(\beta_0) = \frac{1}{\zeta(2\beta_0)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A(\beta_0, q)\, d(q^*)}{q^{\beta_0}} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A(1, q)\, d(q^*)}{q} \left(1 + O\left(\frac{\log u_0}{\log y_0}\right)\right)$$
$$= A\left(1 + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right).$$

D'autre part, on a, pour x suffisamment grand,

$$A(\beta_0 - 1/48) \ll 1, \qquad D(\beta_0 - 1/48) \ll 1,$$
$$li(u_0 \xi(u_0)) + \log\log y_0 = \sqrt{\frac{2\log x}{\log\log x}} \left(1 + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right),$$
$$\frac{\log\log u_0}{u_0 + \log\log y_0} = o\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)$$
$$\text{et} \qquad \frac{\log\log y_0}{\log y_0} = o\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right).$$

En remplaçant ces différentes estimations dans la formule (5.1), on obtient la formule annoncée au lemme.

Passons, maintenant, à la démonstration du théorème 1.2. Notons $I = [L_1, L_2]$ où L_1 et L_2 sont les fonctions définies au lemme 2.4. On a

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{d(d(n))}{p(n)} = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \in I}} \frac{d(d(n))}{p(n)} + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) \notin I}} \frac{d(d(n))}{p(n)} =: \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Evaluons Σ_2. Soit $\alpha \geqslant 1$ le plus grand exposant de p tel que p^α divise n. On a

$$\Sigma_2 = \sum_{p \notin I} \frac{1}{p} \sum_{\substack{m \leqslant x/p^\alpha \\ \alpha \geqslant 1,\, p(m) < p}} d[(\alpha+1)\, d(m)] \ll \log^2 x \sum_{p \notin I} \frac{1}{p} \sum_{\substack{m \leqslant x/p \\ p(m) \leqslant p}} d(d(m)).$$

Posons $M=\exp(\sqrt{\log x})$ et scindons la dernière somme,

$$\sum_{p\notin I}\frac{1}{p}\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ p(m)\leqslant p}} d(d(m))=\sum_{p\leqslant M}\frac{1}{p}\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ p(m)\leqslant p}} d(d(m))+\sum_{M<p<L_1}\frac{1}{p}\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ p(m)\leqslant p}} d(d(m))$$
$$+\sum_{p>L_2}\frac{1}{p}\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ p(m)\leqslant p}} d(d(m))=:\Sigma_{2,1}+\Sigma_{2,2}+\Sigma_{2,3}.$$

Maintenant, compte tenu du corollaire du théorème 1.1 et du lemme 2.4 on obtient successivement,

$$\Sigma_{2,2}\ll\sqrt{\frac{2\log x}{\log\log x}}\sum_{p<L_1}\frac{1}{p}\Psi\left(\frac{x}{p},p\right)\ll\frac{1}{\log^3 x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p(n)}$$

et

$$\Sigma_{2,3}\ll\sqrt{\frac{2\log x}{\log\log x}}\sum_{p>L_2}\frac{1}{p}\Psi\left(\frac{x}{p},p\right)\ll\frac{1}{\log^3 x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p(n)}.$$

Quant à $\Sigma_{2,1}$, l'application du corollaire du théorème 1.1, après la majoration, donne

$$\Sigma_{2,1}\leqslant\sum_{p\leqslant M}\frac{1}{p}\sum_{\substack{m\leqslant x\\ p(m)\leqslant M}} d(d(m))\ll\sqrt{\log x}\log\log x\Psi(x,M).$$

Maintenant, l'utilisation de la formule de Hildebrand pour $\Psi(x,y)$ (cf. [13] Theorem 1) et l'approximation de la fonction ρ de Dickman, (cf. par exemple [23]), suivante

$$\rho(v)=\exp\left\{-v\left(\log v+\log\log v-1+\frac{\log\log v-1}{\log v}+O\left(\left(\frac{\log\log v}{\log v}\right)^2\right)\right)\right\},$$

et la comparaison de l'expression de $\Psi(x,M)$ ainsi obtenue aux formules (1.5) et (1.6) donnent

$$\Sigma_{2,1}\ll\frac{1}{\log^3 x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p(n)}.$$

Finalement, en regroupant les quantités estimées, on obtient

$$\Sigma_2\ll\frac{1}{\log x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{p(n)}.$$

Evaluons Σ_1. Scindons Σ_1:

$$\Sigma_1 = \sum_{p \in I} \frac{1}{p} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) = p \\ p(n) \parallel n}} d(d(n)) + \sum_{p \in I} \frac{1}{p} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p(n) = p \\ p^2(n) \mid n}} d(d(n)) =: \Sigma_{1,1} + \Sigma_{1,2},$$

et scindons $\Sigma_{1,1}$:

$$\Sigma_{1,1} = \sum_{p \in I} \frac{1}{p} \sum_{\substack{m \leqslant x/p \\ p(m) \leqslant p}} d(2d(m)) - \sum_{p \in I} \frac{1}{p} \sum_{\substack{m \leqslant x/p \\ p(m) = p}} d(2d(m)) =: \hat{\Sigma}_{1,1} - \hat{\hat{\Sigma}}_{1,1}.$$

Maintenant, $\hat{\hat{\Sigma}}_{1,1}$ et $\Sigma_{1,2}$ s'évaluent de la même façon, en effet, l'application du corollaire du théorème 1.1, après majoration donne

$$\hat{\hat{\Sigma}}_{1,1} \ll \log^2 x \sqrt{\frac{2 \log x}{\log \log x}} \sum_{p \in I} \frac{1}{p} \Psi\left(\frac{x}{p^2}, p\right)$$

et

$$\Sigma_{1,2} \ll \log^2 x \sqrt{\frac{2 \log x}{\log \log x}} \sum_{p \in I} \frac{1}{p} \Psi\left(\frac{x}{p^2}, p\right).$$

Mais, la méthode décrite dans [18] utilisée ici (nous omettons les détails) donne

$$\sum_{p \in I} \frac{1}{p} \Psi\left(\frac{x}{p^2}, p\right) \ll \frac{1}{\log^4 x} \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(n)}$$

et par conséquent

$$\hat{\hat{\Sigma}}_{1,1} \ll \frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(n)} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{1,2} \ll \frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(n)}.$$

Quant à $\hat{\Sigma}_{1,1}$, puisque $L_1 \leqslant p \leqslant L_2$, on applique les lemmes 5.1 et 2.4, on trouve

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,1} &= \sqrt{\frac{2 \log x}{\log \log x}} \left(A + O\left(\frac{\log \log \log x}{\log \log x}\right)\right) \sum_{p \in I} \frac{1}{p} \Psi\left(\frac{x}{p}, p\right) \\ &= \sqrt{\frac{2 \log x}{\log \log x}} \left(A + O\left(\frac{\log \log \log x}{\log \log x}\right)\right) \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p(n)}.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du théorème 1.2.

Remerciements

Je remercie vivement Aleksandar Ivić et Eira J. Scourfield pour leurs remarques. Je remercie également le referee anonyme pour ses critiques.

Références

1. K. Alladi, The Turán–Kubilius inequality for integers without large prime factors, *J. Reine Angew. Math.* **335** (1982), 180–196.
2. N. G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *Nederl. Akad. Wetensh. Proc. Ser. A* **54** (1951), 50–60.
3. N. G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, II, *Nederl. Akad. Wetensh. Proc. Ser. A* **69** (1966), 239–247.
4. K. Dickman, On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude, *Ark. Mat. Astr. Fys.* **22** (1930), 1–14.
5. V. Ennola, On numbers with small prime divisors, *Ann. Acad. Sc. Fenn. Ser. AI* **440**, 16 pp.
6. P. Erdös, On the sum $\sum_{n=1}^{x} d[d(n)]$, *Math. Student* **36** (1968), 227–229.
7. P. Erdös et A. Ivić, Estimates for sums involving the largest prime factor of an integer and certain additive functions, *Stud. Sci. Math. Hungar.* **15** (1980), 183–199.
8. P. Erdös, A. Ivić, et C. Pomerance, On sums involving reciprocals of the largest prime factor of an integer, *Glas. Mat. III. Ser.* **21**, No. 41 (1986), 283–300.
9. E. Fouvry et G. Tenenbaum, Diviseurs de Tichmarsh des entiers sans grand facteur premier, *in* "Analytic Number Theory" (E. Fouvry, Ed.), Tokyo 1988, Lecture Notes in Math., Vol. 1434, pp. 86–102, Springer, Berlin, 1990.
10. E. Heppner, Über die Iteration von Teilerfunktionen, *J. Reine Angew. Math.* **265** (1974), 176–182.
11. A. Hildebrand, On a problem of Erdös and Alladi, *Monatsh. Math.* **97** (1984), 119–124.
12. A. Hildebrand, Integers free of large prime factors and the Riemann Hypothesis, *Mathematika* **31** (1984), 258–271.
13. A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.
14. A. Hildebrand et G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.
15. A. Hildebrand et G. Tenenbaum, Integers without large prime factors, *J. Theorie Nomb. Bordeaux* **5** (1993), 411–484.
16. A. Ivić, On Squarefree numbers with restricted prime factors, *Stud. Sc. Math. Hungar.* **20** (1985), 183–187.
17. A. Ivić, On some estimates involving the number of prime divisors of an integer, *Acta Arith.* **49** (1987), 21–33.
18. A. Ivić et C. Pomerance, Estimates for certain sums involving the largest prime factor of an integer, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 34, pp. 769–789, Topics in Classical Number Theory, North-Holland, Amsterdam, 1984.
19. A. Ivić et G. Tenenbaum, Local densities overs integers free of large prime factors, *Quart. J. Math. Oxford (2)* **37** (1986), 401–417.
20. I. Kátai, On the iteration of the divisor-function, *Publ. Math.* **16** (1969), 1–15.
21. G. J. Rieger, Über einige arithmetische Summen, *Manuscripta Math.* **7** (1972), 23–34.
22. H. Smida, Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **63**, No. 1 (1993), 21–50.

23. G. TENENBAUM, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, Publ. Inst. Elie Cartan, Vol. 13, Nancy 1990.
24. G. TENENBAUM, Sur un problème d'Erdös et Alladi, *in* "Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–89" (C. Goldstein, Ed.), Progress in Math., pp. 221–239, Birkhäuser, Basel, 199.
25. T. Z. XUAN, On sums involving reciprocals of certain large additive functions, *Publ. Inst. Math. Beograd (NS)* **45**, No. 59 (1989), 41–55.
26. T. Z. XUAN, On sums involving reciprocals of certain large additive functions. II, *Publ. Inst. Math. Beograd (NS)* **46**, No. 60 (1989), 25–32.
27. T. Z. XUAN, The average order of $d_k(n)$ over integers free of large prime factors, *Acta Arith.* **55** (1990), 249–260.
28. T. Z. XUAN, The Turán–Kubilius inequality for integers free of large prime factors, *J. Number Theory* **43** (1993), 82–87.